○学习导引○

常回家看看

——一类几何问题的巧思妙解

尤善培

（江苏省扬州市邗江区教育局，225000）

有一首流行歌曲，歌名叫《常回家看看》，唱出了子女对老人的孝敬之心，也唱出了老人对子女的思念之情，还唱出了一类几何问题的解题思路.

现在从一个很简单的问题谈起.

问题：如图 1，$\triangle ABC$ 中，D、E 分别是 AB、AC 的中点，沿 DE 将 $\triangle ADE$ 折起至 A 点落在 BC 上为止，接着再进行两次折起，如图 2.

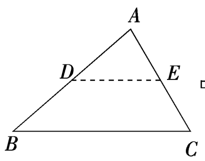

图 1

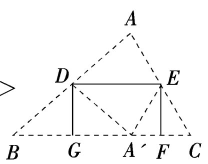

图 2

这样，就得到了一个漂亮的矩形 $DEFG$. 有趣的是，这一折纸活动实现了 $\triangle ABC$ 中三个角的大转移，它们在 BC 处实现了大聚会. 具体地说，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 分别跑到了 $\angle DA'E$、$\angle DA'G$、$\angle EA'F$ 的位置. 更为有趣的是，这三个角的和还是一个平角，即 $180°$. 因而，这样的折纸活动就折出了一个定理：三角形的三个内角之和为 $180°$，而且其证明的方法也一目了然.

这个证明方法就是让 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 都回到 BC 处来会聚，畅叙友谊，这里也许就是三个角的家，应该要回家看看！

当然我们也可以让 $\angle A$ 不动，让 $\angle B$、$\angle C$ 都在 A 处聚会.

如图 3，过 A 点作 BC 的平行线，

显山露水，要在潜移默化中引导学生步入数学的殿堂. 要让学生理解数学，最有效的办法就是引导学生挖掘身边的数学，让学生扎根在真实生活的情境中，激发他们积极参与到数学学习中去.

数学新课程标准指出，学生应当在教师指导下主动的、富有个性的学习. 因此，要真正实现学生学习的有效性，教师的教学行为必须实现两个转变：

一是由注重“传授”向注重“引导”转变.

课程目标的个性化和弹性化是目前数学课程设计的一个重要方向. 在此背景下，教师应该是探索知识的向导、学生学习的组织者和引导者. 新课程强调数学学习是一种体验、理解和反思的过程，因此，教师需要加强学生数学实践活动的设计和指导，建立一个可接纳的、具有支持性的、宽容的课堂气氛，促进学生全面和谐的发展. 案例二中的教师采用了新方法、新手段，效果不言而喻.

二是由注重“模式”向注重“个性”转变.

新课程要求教师创造性地开展教学活动，教师要针对教材和学生的心理特点作一些科学的处理，从而形成可以操作的教学思路. 案例一中的教法，可以让部分学生学会这条题目的解法，但对许多学生来说，他们很可能熟视无睹、无动于衷，没有积极投入. 因此在优化教法上，需要我们进行教法的设计和加工，克服组织形式的模式化，珍惜学生的情感和学生智慧的萌芽，使每个学生对学习数学有兴趣，使每个学生向着个性化方向发展.

则显然有 $\angle 1 = \angle B$, $\angle 2 = \angle C$. 这样的聚会同样能取得预期的效果.

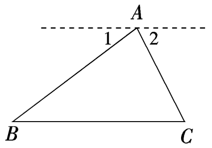

图 3

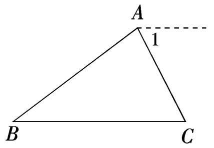

图 4

我们还可以先让 $\angle C$ 和 $\angle A$ 相聚后再和 $\angle B$ 联系,同样取得很理想的效果.

如图 4,过 A 作 BC 的平行线,则

$\angle A + \angle 1 = 180° - \angle B$,

即 $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

回家看看!这就是一个非常巧妙的解题思路.

例 1 在六边形 $ABCDEF$ 中, $\angle B + \angle D + \angle F = 360°$, $AB = AF$, $CB = CD$, $ED = EF$,设六边形的面积为 S,求 $\triangle ACE$ 的面积.

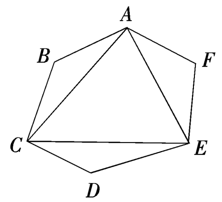

图 5

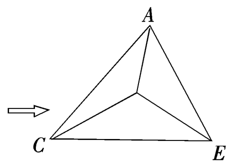

图 6

分析 阅读此题,确实无从下手,六边形的面积和三角形的面积之间存在着什么关系呢?

进一步考察此题的已知条件, $\angle B + \angle D + \angle F = 360°$,刚好是一个周角,而且 $AB = AF$, $CB = CD$, $ED = EF$,这就使我们想到 $\triangle ABC$, $\triangle CDE$, $\triangle EFA$ 可能是一个家中的成员. 让它们回家看看!如图 6,果然如此,因此, $\triangle ACE$ 的面积应是 $\frac{S}{2}$.

请再看一例.

例 2 如图 7, $AA' = BB' = CC' = 2$, $\angle AOB' = \angle BOC' = \angle COA' = 60°$.

求证: $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle BOC'} + S_{\triangle COA'} < \sqrt{3}$.

分析 让我们仔细观察题目,容易发现两点:

(1) 线段的长度都是 2,那么整齐;

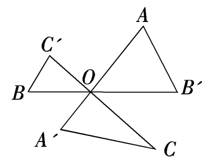

图 7

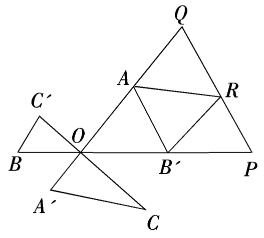

图 8

(2) 夹角的大小都是 60°,那么匀称.

于是我们想到:这几个三角形会不会也是从一个家中走出来的成员呢?

如图 8,显然它们是边长为 2 的正 $\triangle OPQ$ 家中的成员.

因此,有 $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle BOC'} + S_{\triangle COA'} < S_{\triangle OPQ}$,

即 $S_{\triangle AOB'} + S_{\triangle BOC'} + S_{\triangle COA'} < \sqrt{3}$.

回家看看固然重要,但是找到"家"才是解决问题的关键.

下面我们再欣赏一个题目的思考过程.

例 3 P 为正 $\triangle ABC$ 内的一点, $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$,求 $\angle APB$ 的大小.

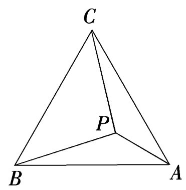

图 9

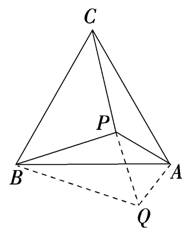

图 10

分析 $PA = 3$, $PB = 4$, $PC = 5$,也就是说,由 PA、PB、PC 作为三角形三边的话,将构成一个直角三角形.

问题是 PA、PB、PC 不在一个"家"中.

于是我们想找一个地方让它们聚聚!

我们采取的策略是:让它们出来走走.

注意:要求 $\angle APB$ 的大小(本题目标).

思路:建立一个新"家"!

在 $\triangle ABC$ 外找一点 Q,使得 $BQ = 5$, $AQ = 3$,则 $\triangle ABQ \cong \triangle ACP$(如图 10).

连结 PQ,那么 $\triangle APQ$ 为正三角形,且 $\triangle BPQ$ 为直角三角形.

这里 $\triangle BPQ$ 为 AP、BP、CP 的新家.

因此, $\angle APB = \angle BPQ + \angle APQ = 150°$.