○高考复习○

谈 2008 年江苏省高考题

单 墫

（江苏省南京师范大学，210097）

2008 年江苏省高考题（见本期第 32 ～ 38 页），内容既贴近省编新教材，又兼顾文、理两科，难度适中，有区分度，普遍反映较好.

题目的答案业已公布，这里不再重复. 本文只就几道试题稍加议论.

第 7 题是与“算法”有关的问题. 这类问题放到计算机的课程中更为合适. 在数学中考，不允许用计算器，考生只能手算. 因此，计算的速度（当然首先要正确）就很重要，尤其是在高考这样重要的考试中，“时间就是成绩”.

这道题实际上就是求

$$4.5\times0.12+5.5\times0.2+6.5\times0.40+7.5\times0.2+8.5\times0.08 \quad ①$$

的值，这个式子是

$$4.5,5.5,6.5,7.5,8.5. \quad ②$$

的“加权平均”. 权的和

$$0.12+0.2+0.40+0.2+0.08=1 \quad ③$$

如果将“权”理解为 ② 中各组出现的概率，那么 ① 就是它们的数学期望.

从左到右，逐步计算，当然能求出 ① 的值. 但太慢！这种问题，应当先估一个数作为平均值，再作调整. 所估的数，自然是居中的 6.5. 这时 7.5 比它大 1，而 5.5 比它小 1，两者出现的频率（权）又都为 0.20，所以

$$5.5\times0.20+7.5\times0.20$$

可以换成

$$6.5\times0.20+6.5\times0.20.$$

4.5 比 6.5 小 2，而 8.5 比 6.5 大 2，但两者出现的频率不同，分别为 0.12 与 0.08，所以将

$$4.5\times0.12+8.5\times0.08$$

换成

$$6.5\times0.12+6.5\times0.08$$

多出

$$2\times(0.12-0.08)=0.08. \quad ④$$

从而(1) 的值是

$$6.5-0.08=6.42. \quad ⑤$$

上述过程，应当用心算完成. 至多简单地在草稿纸上写出 0.04（= 0.12 − 0.08），0.08（= 0.04 × 2）等少数数据.

第 12 题，可由图形直接得出$\frac{a^2}{c}=\sqrt{2}a$，即 $e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

第 13 题，应当知道：到线段 AB 两端距离的比为定值 λ（本题 $\lambda=\sqrt{2}$）的点 C 的轨迹是一个圆，通常称为阿氏（Apollonius，约前 260 ～ 前 190）圆. 这个圆的圆心 O 在直线 AB 上，圆与直线 AB 的两个交点 C_1,C_2，分别将线段 AB 内分、外分为 $\lambda:1$，即

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\lambda,\ \frac{AC_2}{C_2B}=-\lambda. \quad ⑥$$

如果以 A 为原点，直线 AB 为数轴，又设 $AB=l$，那么由定比分点公式，C_1,C_2 的坐标分别是

$$\frac{\lambda l}{\lambda+1},\ \frac{\lambda l}{\lambda-1}. \quad ⑦$$

于是直径 C_1C_2 的长是

$$\left|\frac{\lambda l}{\lambda-1}-\frac{\lambda l}{\lambda+1}\right|=\frac{2\lambda l}{|\lambda^2-1|}. \quad ⑧$$

$\triangle ABC$ 的底 AB 的长固定时，它的面积在高 CD 最大时，取得最大值. 而 C 在 $\odot O$ 上运动时，C 到直径 C_1C_2 的距离最大的半径 CO（这时 D 与 O 重合）. 因此面积的最大值为

$$\frac{1}{2}\cdot l\cdot\frac{\lambda l}{|\lambda^2-1|}. \quad ⑨$$

特别地，在 $l=2,\lambda=\sqrt{2}$ 时，最大值为 $2\sqrt{2}$.

定比分点公式十分重要. 课程标准中虽

然没有，教师应当补充. 上面的一些结论，如⑦、⑧、⑨，平时如果练习过，考试时就游刃有余了.

第 17 题是一道很有趣的应用题，原题(i)建立两种函数关系，给考生解(ii)至少提供了两种办法. 这种与考生友善(而不是以考生为敌人)的思想值得提倡. 其中函数 $\frac{20-10\sin\theta}{\cos\theta}$ 的极值，除用导数外，亦可由不等式

$$\frac{2-\sin\theta}{\cos\theta}\geqslant\sqrt{3} \quad ⑩$$

定出，一般地，在 $c=\sqrt{a^2-b^2}$ 时，

$$a-b\sin\theta-c\cos\theta\geqslant a-\sqrt{b^2+c^2}=0,$$

所以

$$\frac{a-b\sin\theta}{\cos\theta}\geqslant\sqrt{a^2-b^2}. \quad ⑪$$

即左边函数的最小值为 $\sqrt{a^2-b^2}$.

第 17 题中的 O 点即所谓 Fermat 点. 在 $\triangle PAB$ 中，到三个顶点的距离的和.

$$OP+OA+OB$$

为最小的点 O 称为 Fermat 点. 当 $\triangle PAB$ 的内角都不超过 $120°$ 时，O 在 $\triangle PAB$ 内，而且

$$\angle POA=\angle AOB=\angle BOP=120°. \quad ⑫$$

这与本题的结论是一致的.

第 18 题中，圆 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 与 x 轴交点的横坐标可由

$$x^2+Dx+F=0$$

定出. 由于它们也是 $x^2+2x+b=0$ 的根，所以 $D=2$，$F=b$(不必具体求出 $x^2+2x+b=0$ 的根).

第 19 题普遍反映较难，这表明学生的阅读与理解能力极需加强. 其实第(i)小问已是命题者友善的提示. 如果没有这一小问，那就更难了. 当然，如果问题改为求 n 的所有可能值，那么第一步仍是从最简单的情况 $n=4$ 做起. 将简单的情况搞清楚了，然后再推而广之.

在 a_1,a_2,a_3,a_4 中删去一项，有 4 种情况：

(a) a_1,a_2,a_3 成等比数列；

(b) a_2,a_3,a_4 成等比数列；

(c) a_1,a_2,a_4 成等比数列；

(d) a_1,a_3,a_4 成等比数列.

前两种情况都产生方程

$$a(a+2d)=(a+d)^2. \quad ⑬$$

(只是(a)中 $a=a_1$，(b)中 $a=a_2$)所以 $d=0$，与已知不合.

(c)产生方程

$$a(a+3d)=(a+d)^2, \quad ⑭$$

其中 $a=a_1$，解得 $a_1=d$，$\frac{a_1}{d}=1$.

(d)同样产生形如⑭的方程，只是 $a=a_4$，而 d 却是原来公差 d 的相反数. 于是与(c)相同，得出 $\frac{a_4}{-d}=1$，即 $\frac{a_1}{d}=-4$.

善于将一种情况归结(化归)为另一种情况，可以节省时间.

在 $n\geqslant5$ 时，由于(a)、(b)不能出现，而(c)、(d)两种情况不能同时出现，所以原数列不可能删去一项后成为等比数列.

第 22 题可以不用向量(考查向量知识的目的难免落空). 不妨设 $AB=1$，则 $BD_1=\sqrt{3}$，$D_1A=\sqrt{2}$，

$$\cos\angle AD_1B=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad ⑮$$

由余弦定理及 $D_1P=\sqrt{3}\lambda$，得

$$PA^2=(\sqrt{3}\lambda)^2+(\sqrt{2})^2-2(\sqrt{3}\lambda)(\sqrt{2})\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$=3\lambda^2-4\lambda+2.$$

由 $\angle APC$ 为钝角，得

$$2PA^2=PA^2+PC^2<AC^2=2,$$

亦即

$$3\lambda^2-4\lambda+2<1,$$

从而

$$\frac{1}{3}<\lambda<1.$$

第 23(2)(iii)题也可以不用积分.

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\mathrm{C}_n^k=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{n+1}{k+1}\mathrm{C}_n^k$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_{n+1}^{k+1}$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{h=1}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{h}$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{h=0}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^{h}-1\right)$$

$$=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}. \quad ⑰$$