○数学与生活○

圆锥曲线与生活

赵明香

（江苏省扬州大学数学科学学院 0501 班，225002）

数学，平凡而又神奇. 说它平凡，是因为它浓缩于生活的点点滴滴，渗透到世界的每个角落；说它神奇，是因为它的每点每滴又无不点缀着人类的生活，孕育着人类的文明，折射着人类的智慧，数学中有无数的发现都给我们的生活带来了无穷的乐趣. 数学既然与生活如此的紧密联系，因此，我们应该引导学生从生活中去学习数学. 这样，不仅可以培养学生学习数学的兴趣，让学生不再感到数学是枯燥无味的；而且可以引导学生从实际问题中采集、筛选、重组和整合数学信息，可以培养学生的应用能力和创造性分析问题、解决问题的能力. 这里仅以圆锥曲线与生活的紧密结合为例，以期抛砖引玉.

一、折纸 —— 圆锥曲线

人们都说圆锥曲线的发现是一个非常伟大的发现. 其实，圆锥曲线的发现就是来源于生活，大家不妨回忆一下上新课时老师是怎样用一根绳子得到圆锥曲线的，这不就说明了圆锥曲线就是来源于我们的生活吗？还有，地球绕太阳运行的轨道、圆锥的截面线，等等都是圆锥曲线的来源背景. 圆锥曲线在生活中的来源是非常广泛的，这里来介绍一种别开生面的来源 —— 折纸. 下面让我们一起来看看折纸是如何巧成圆锥曲线的，一起来感受其造化之巧！

取矩形纸张 $ABCD$，在其上有半径为 R 的圆 O，A 为圆 O 内一定点，且 $OA = a(0 < a < R)$. 折叠纸片，使圆周上一点 A' 刚好与点 A 重合，这样的每一种折法，都留下一条折痕，当 A' 取遍圆周上所有点时，所有折痕所围成的轮廓线就是一条圆锥曲线 —— 椭圆. 下面给出证明.

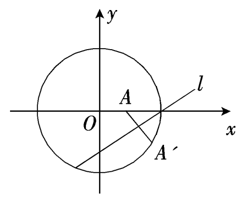

图 1

证明 如图 1，设圆方程为 $x^2 + y^2 = R^2$，定点 $A(a,0)(0 < a < R)$，$A'(R\cos\theta, R\sin\theta)$，则折痕为 AA' 的中垂线 l. AA' 的斜率

$$k_{AA'} = \frac{R\sin\theta}{R\cos\theta - a},$$

$$\therefore AA' \text{ 中点为} \left(\frac{R\cos\theta + a}{2}, \frac{R\sin\theta}{2}\right).$$

$\therefore$ 直线 l 的方程为

$$y - \frac{R\sin\theta}{2} = -\frac{1}{k_{AA'}}\left(x - \frac{R\cos\theta + a}{2}\right),$$

化简得 $2R(y\sin\theta + x\cos\theta) = 2ax + R^2 - a^2$，

$$\therefore \quad |2ax + R^2 - a^2| \leqslant 2R\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\therefore (2ax + R^2 - a^2)^2 \leqslant 4R^2(x^2 + y^2)$$

$$\therefore 4(R^2 - a^2)\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + 4R^2y^2 \geqslant R^2(R^2 - a^2).$$

$$\therefore \frac{(x-a)^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{R^2 - a^2}{4}} \geqslant 1.$$

因此所有折痕所在直线上的点的集合为椭圆 $\frac{(x-a)^2}{\frac{R^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{R^2 - a^2}{4}} = 1$ 外（包括该椭圆上）的点，故折痕的轮廓线（即以折痕为切线

的曲线）是以 O、A 为焦点的椭圆.

说明　这里只介绍了如何用纸折成椭圆. 如果在这张矩形纸片 $ABCD$ 上取点 F 为与 AB 距离为 a 的点，折叠纸片，使 AB 边上点 P 与 F 重合，则所有折痕围成的轮廓线形成一条抛物线；如果在这张矩形纸片 $ABCD$ 上画圆 O，A 为圆 O 外一定点，折叠纸片，使 A 与圆周上的点 A' 重合，当 A' 取遍圆周上所有点时，所有折痕围成的轮廓线形成一条以 O，A 为焦点的双曲线. 仿照椭圆的证明过程，建立适当的直角坐标系，很容易证明这些结论.

二、生活 —— 圆锥曲线的“用武之地”

圆锥曲线不仅源于生活，还应用于生活，在我们的实际生活中处处都有圆锥曲线的应用，大到化工厂或热电厂的冷却塔的制造，小到隧道、桥梁的设计；大到人造卫星运行轨道的探求，小到商店买卖的路线选择，等等，它不仅丰富了我们的生活，使我们的生活多姿多彩，更提高了我们的工作效率和简易便捷的方法.

例 1　一只船上有两根高度均为 7.5 m，相距 15 m 的桅杆，有一条 30 m 长的绳子，两端系在两根桅杆的顶点上，并按下图所示的方式绷紧，假定这条绳子在系到桅杆上时并没有减少长度，且处在两根桅杆所在的平面内，求绳子与甲板的接触点到两根桅杆的距离.

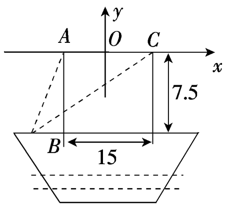

图 2

分析　这是一道日常生活常见的一道实际问题. 初看上去，好象并没有与圆锥曲线的知识有任何联系，但如果注意到了绳子与甲板接触点到两根桅杆顶点的距离之和是一个定值 30 m，这与我们数学中椭圆的定义恰恰相符，那么，这道实际应用题就可以转化为一道非常简单的有关圆锥曲线的数学题了.

略解　如图 2，建立直角坐标系，由于绳子与甲板接触点到两根桅杆顶点的距离之和是一个定值 30 m，易知该接触点在以 A，C 为焦点的椭圆上. 可设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

其中 $2a=30$，$2c=15$，

$\therefore b=\sqrt{15^2-7.5^2}\approx 13.$

将 $y=-7.5$ 代入椭圆方程可得 $x=\pm 12.25$，于是绳子与甲板的接触点到两根桅杆的距离为 4.75 m 与 19.75 m.

当然，圆锥曲线在生活中的运用并非仅仅这些. 比如，你知道天文学家为什么能准确计算出彗星出现的时间和预测一些天文现象的吗?其中一个主要的原因是因为他们通过观察天体运行中的一些有关数据可以推算出它们运行轨道的方程，有椭圆、抛物线、双曲线等圆锥曲线，从而算出它们的运行周期及轨道的周长. 这些也为我们研制人造卫星提供了理论依据.

三、圆锥曲线中形影不离的“情侣”曲线

深入研究圆锥曲线，我们会发现一些非常有趣的现象. 设双曲线 $C_1:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的顶点为 A'，A，弦 PQ 和 AA' 所在直线垂直，则直线 $A'P$ 与直线 AQ 的交点的轨迹是以 C_1 的实轴为长轴，虚轴为短轴的椭圆 $C_2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. 下面给出该结论的前一半证明，后一半类似.

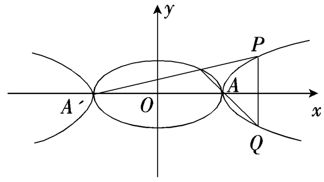

图 3

证明　不妨设 C_1 两顶点为 $A'(-a,0)$，$A(a,0)$（如图 3）. 由 $PQ\perp AA'$ 可设 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_1,-y_1)$，则

○短文集锦○

善用“1”巧解题

王俊胜

(江苏省南京市溧水县第二高级中学,211200)

在数学中,“1”真可谓变化多端,巧妙利用“1”的不同表现形式,适当构造“1”的某种表达式,在解题时往往能产生神奇的作用. 本文通过举例来说明“1”的妙用.

一、求值

例1 计算$\frac{1-\tan 105°}{1-\tan 75°}$.

分析 本题初看好像无从下手,但注意到$1=\tan 45°$,就可以将该式化成和的正切值形式.

解 原式$=\frac{\tan 45°+\tan 75°}{1-\tan 45°\tan 75°}$

$=\tan(45°+75°)$

$=\tan 120°$

$=-\sqrt{3}$.

例2 已知$\tan\alpha=2$,求$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha$的值.

分析 本题可以通过$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$,求得$\sec^2\alpha$,进一步求出$\cos\alpha,\sin\alpha$,再进行运算. 但该法不仅要讨论三角函数的符号,且计算繁琐. 若能注意到“$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$”这个性质就可将题中三角函数值化归成$\tan\alpha$的形式,达到巧妙求解的目的.

解 $\because 2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha$

直线$A'P$的方程为$y=\frac{y_1}{x_1+a}(x+a)$,

直线AQ的方程为$y=\frac{-y_1}{x_1-a}(x-a)$.

两式相乘得$y^2=\frac{-y_1^2}{x_1^2-a^2}(x^2-a^2)$. ①

又点P在双曲线上,故$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$,即

$$y_1^2=\frac{b^2}{a^2}(x_1^2-a^2),$$

代入①式得 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,

即为所求椭圆C_2的方程,故结论成立.

反过来,若椭圆C_2的弦PQ和长轴AA'所在直线垂直,则直线$A'P$与直线AQ的交点的轨迹是以C_2的实轴为长轴,虚轴为短轴的双曲线C_1,这样,椭圆C_2与双曲线C_1相伴,双曲线C_1与椭圆C_2相随(图2),它们不就是形影相伴的“情侣”曲线吗?

注 圆锥曲线中不仅有非常巧妙的图形,还有非常巧妙的性质,如以黄金分割数$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$为离心率的椭圆具有性质:(1)焦点与准线之间的距离等于长半轴长;(2)长轴长、短轴长、焦距依次成等比数列;(3)长轴端点到相应准线距离等于半焦距,等等. 这些性质都容易证明. 只要我们用心去研究,一定会有更多有趣的图形和性质展现.

缤纷生活中的点点滴滴无不蕴含着数学的巧妙,数学和生活一路同行. 本文只介绍了数学与圆锥曲线的密切联系,数学在生活中的更大魅力和更多光彩还有待大家去发现,去增添,去创造!