回归本源

——浅谈用定义求解圆锥曲线问题

王丽妍

（江苏省扬州大学数学科学学院，225002）

当解决一个问题毫无头绪的时候，不妨回归本源. 这是侦探类电视中著名的“back to basic”定律. 笔者一直认为做数学题犹如破案，一个题目就是一个 case，解题的关键就是找线索，找证据. 在圆锥曲线的学习中，这个“basci”就是定义. 为了便于读者更好地体会这个定律，更好地解决这一类题，现将其第一、第二定义及常见题型归纳如下：

一、圆锥曲线的定义

圆锥曲线	第一定义	第二定义
椭圆	平面内到定点 F_1,F_2 的距离之和等于定长（大于 $\lvert F_1F_2\rvert$）的点的轨迹	平面内到一定点的距离与到一定直线的距离之比为定值 $e(0<e<1)$ 的点的轨迹
双曲线	平面内到两定点 F_1,F_2 的距离之差的绝对值等于定长（小于 $\lvert F_1F_2\rvert$）的点的轨迹	平面内到一定点的距离与到一定直线的距离之比为定值 $e(e>1)$ 的点的轨迹
抛物线	平面内到一定点 F 与到一定直线的距离相等的点的轨迹	

二、常见题型

1. 求轨迹

例 1 已知圆 $x^2+y^2=4$，$P(\sqrt{3},0)$，M 为圆上的动点，MP 的中垂线交 OM 于 Q，求点 Q 的轨迹.

分析 M 为圆上的动点，则 MO 等于 $\odot O$ 的半径，即 $QM+QO=2$. Q 在 MP 的中垂线上，有 $QM=QP$，所以 $QP+QO=2>\sqrt{3}$，对照椭圆的第一定义，易知 Q 的轨迹是以 O、P 为焦点，2 为长轴长的椭圆.

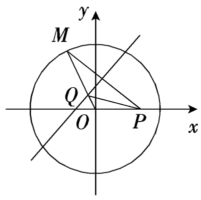

图 1

例 2 已知三点：$A(-7,0)$，$B(7,0)$，$C(2,12)$.

（1）若椭圆过 A,B 两点，且以 C 为焦点，求其另一个焦点 P 的轨迹.

（2）若双曲线的两个分支分别过 A,B 两点，且以 C 为一个焦点，求另一个焦点 Q 的轨迹.

分析 在求轨迹的时候，通常有两种方法，一种是逐步分析找关系，如例 1；一种是设点求方程，根据方程判断轨迹. 本题出现了比较多的坐标点，我们考虑用第二种方法. 设所求轨迹上任一点 (x,y)，则已知椭圆、双曲线上两点和两焦点，结合椭圆、双曲线的第一定义，列出等式，得到关于 x,y 的方程，将方程用语言文字表述出来，即得到轨迹.

简解 （1）设轨迹上任一点 $P(x,y)$，由椭圆第一定义，得

$$|AP|+|AC|=|BP|+|BC|,$$

即 $|BP|-|AP|=|AC|-|BC|$.

$\because |AC|-|BC|=2$,

$\therefore |BP|-|AP|=2<14$.

点 P 到两定点 $(7,0)$，$(-7,0)$ 的距离之差为定值 2，且小于两定点的距离 14，由双曲线的第一定义知另一个焦点 P 的轨迹是以 $(7,0)$，$(-7,0)$ 为焦点，2 为实轴长的双曲线的左

支.

(2) 设轨迹上任一点 $Q(x,y)$,由双曲线第一定义,得

$|AQ|-|AC|=|BC|-|BQ|$,

即 $|AQ|+|BQ|=|AC|+|BC|$.

$\because |AC|+|BC|=28$,

$\therefore |AQ|+|BQ|=28>14$.

$\therefore$ 点 Q 的轨迹是以 A、B 为焦点,长轴为 28 的椭圆.

2. 求面积

例 3 设 F_1,F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的焦点,P 是椭圆上一点,若 $\angle F_1PF_2=60°$,求 $\triangle PF_1F_2$ 的面积.

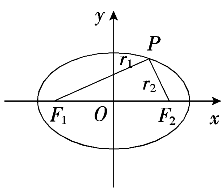

图 2

分析 已知 $\triangle PF_1F_2$ 的一角 $\angle F_1PF_2=60°$,要求面积,我们不妨设 $PF_1=r_1,PF_2=r_2$,则 $S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}r_1r_2$,问题转化为求 r_1r_2 的值. 题目只告诉我们 P 是椭圆上一点,我们无法直接求出 r_1,r_2 的值,不妨回到椭圆的定义上. 由椭圆的定义,可以得到 $r_1+r_2=10$,结合 $\angle F_1PF_2=60°$,在 $\triangle PF_1F_2$ 中运用余弦定理 $\cos 60°=\frac{1}{2}=\frac{r_1^2+r_2^2-(2c)^2}{2r_1r_2}=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-(2c)^2}{2r_1r_2}$,利用给定的椭圆方程,容易求出 r_1r_2.

简解 设 $PF_1=r_1,PF_2=r_2$,则

$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}r_1r_2\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{4}r_1r_2$.

由椭圆的第一定义知

$$r_1+r_2=2a=10.$$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中运用余弦定理:

$$\cos 60°=\frac{1}{2}=\frac{r_1^2+r_2^2-(2c)^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{(r_1+r_2)^2-2r_1r_2-(2c)^2}{2r_1r_2}$$

$$=\frac{100-2r_1r_2-64}{2r_1r_2}.$$

$\therefore r_1r_2=12.\therefore S_{\triangle PF_1F_2}=3\sqrt{3}$.

3. 求关系

例 4 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左焦点为 F_1,顶点为 A_1,A_2,P 为双曲线上任意一点,则分别以线段 PF_1,A_1A_2 为直径的两圆有什么位置关系?

分析 要求两圆的关系,我们一般考察圆心距. 在所给条件下,建立坐标轴,因为双曲线的特殊性,我们必须考虑 P 在左支或右支两种情况,连结两圆心,找出平行和数量关系,结合双曲线的第一定义,不难得出答案.

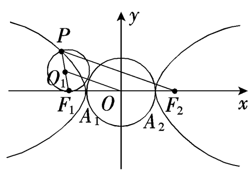

图 3

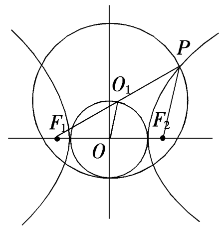

图 4

简解 设两圆圆心为 O_1,O,连接 O_1O,PF_1,PF_2,则两圆半径分别为 $r_1=\frac{1}{2}PF_1,r=a$,设圆心距为 d.

(1) 若点 P 在双曲线左支上(如图 3),则 $d=O_1O=\frac{1}{2}PF_2$. 由双曲线第一定义,知

$PF_2-PF_1=2a$,即 $PF_2=2a+PF_1$.

$d=\frac{1}{2}PF_2=\frac{1}{2}(2a+PF_1)=r_1+r$.

故两圆外切.

(2) 若点 P 在双曲线右支上,则 $d=O_1O=\frac{1}{2}PF_2$,由双曲线第一定义知

$$PF_1-PF_2=2a,\text{即 }PF_2=PF_1-2a,$$

$\therefore d=\frac{1}{2}PF_2=\frac{1}{2}(PF_1-2a)=r_1-r$,

故两圆内切.