○教学研究○

渗透数学思想　提高数学思维的策略水平

季素月

（江苏省扬州大学数学科学学院，225002）

一、问题的提出

在数学教学中要渗透数学思想，这一观点几乎已成为每一位数学教师的共识，但如何在日常教学活动中体现这一观点呢？我们先看一个案例.

一位高中数学教师在高一学完了三角变换的一堂复习课上展现了下面一条例题：

例 1　已知 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，$\alpha,\beta\in(0,\pi)$，求 α,β.

稍作分析之后，这位教师让学生在自己作业本上练习. 由于已进行过大量的三角变换的训练，等式左端的变形学生比较熟练，但学生进行三角变换之后，要求出 α,β 的值，却遇到了障碍. 此时，这位教师不失时机地进行了下述讲解.

解　运用三角公式将等式变形为

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}=0. \quad ①$$

注意到 ① 式中的 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的次数，我们可以将之看成是关于 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ 的一元二次方程，因为该方程有解，所以

$$\triangle=4(\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1)\geqslant 0,$$

但 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\leqslant 1$，从而 $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=1$. 再由 α,β 的范围知 $\alpha-\beta=0$. 将之代入 ①，求得 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2}$，于是求得答案 $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$.

在老师讲解过程中，学生听得津津有味，眼神中透露出一种敬佩、仰慕、欣赏的神情，这些神情表达了一个信息：我们老师的方法太奇妙了！而恰恰此时，有一位同学站起来，向老师提出来一个问题：“老师，您怎么想到用这种方法的？我们为什么没有想到呢？”

事实上，这位同学问出了学习的真谛.

如何想到一个妙解？这就是数学思维的策略. 在同学们对一个数学题百思不得其解之时，老师给出自己的方法，学生在听懂之后，往往首先是对美妙方法的欣赏、对教师的解题能力的赞叹，并把教师的方法记下来回家仔细研究. 但欣赏、赞叹、记录，不应该是教学的主要目标. 我们通过一个例题的学习、研究，要使学生学会解决一类问题的思考策略，这才是老师必须教给学生的关键. 虽然“授之于鱼，不如授之于渔”的名言已脍炙人口，但在实际教学中要做到这一点，却不是一件易事.

2001 年颁布的数学课程标准，将学会数学地思考列为数学教学的总体目标之一. 可见，教学生学会数学地思考、提高思维的策略水平已引起数学教育界普遍的重视.

二、数学思想方法对形成数学思维策略的影响

让学生学会数学地思考、形成自己的思维策略的途径有很多，其中一个很重要的途径就是用数学知识中蕴含的数学思想来指导. 一般说来，数学思想是指在具体的认识过程中提炼出来的观念与意向，具有普遍意义和相对稳定的特征，故在后继的学习活动中对学生的思维策略水平有较大影响. 我们不妨用上述例 1 来说明.

事实上，就此题而言，关键是如何由 ① 式想到判别式法. 观察其条件与待求结论，不难发现，本题要求出两个变量 α,β，而条件仅给出一个等式. 要求出两个变量，必须由已知条

件再找出一个制约条件方可,因此用常规的三角变形、解方程的方法是行不通的,必须另辟蹊径,换一个角度去思考,于是便有了判别式法或其他方法. 可以看出,方法的得出,正是方程思想的指导作用. 那么什么是方程思想的内涵呢?

初中生学习列方程解应用题时,掌握了列方程或方程组解各类应用题的方法,但这并不是最终目标,还应该通过该内容的学习,逐渐形成对该项数学活动的概括性认识,这就是将列方程(或方程组)解应用题的各种具体方法、各种问题的具体背景抛开,提炼出对列方程解应用题有普遍意义的一些观念. 这种观念不难概括为以下几点:

(1)将问题归结为求一个或若干个未知量;

(2)寻求未知量与已知量之间的等量关系或变化过程中的不变量;

(3)建立与未知量个数相等的若干个独立的方程.

这些就是方程思想的内涵. 其中第2点亦称为守恒原理,第3点也称为自由度原理. 方程思想一旦形成,便能对后续学习有着重要的指导. 请再看下面一个例子.

例2 已知五个正方形组成一个如图1所示的图形,如何切两刀,使其组成一个边长为1∶2的长方形(见图1).

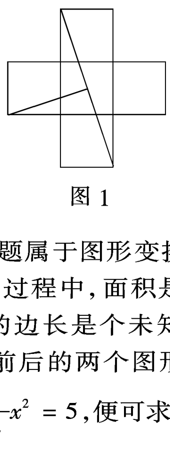

图1

分析 该题属于图形变换的问题,在图形剪切、拼接的过程中,面积是个不变量,而拼成的长方形的边长是个未知量,不妨设其长为x,由拼接前后的两个图形的面积相等,则可建立方程$\frac{1}{2}x^2=5$,便可求得$x=\sqrt{10}$,再观察图形,不难找出图形中长度为$\sqrt{10}$的线段. 剪切的方法唾手可得.

事实上平面几何中的面积法、立体几何中的体积法也体现了这种方程思想中的守恒原理,而例1的解决方法的正是在自由度原理指导下得到的. 运用这种思想可解决与例1类似的问题.

比如,解方程组

$$\begin{cases}x+y=2,\\xy-z^2=1.\end{cases}$$

方程组中有3个变量,只有2个方程,不能用常规方法求解. 根据题目特点,令x,y为方程$t^2-2t+(1+z^2)=0$的两个根,则可以运用判别式求出z的值.

三、对数学教学的启示

早在1988年的义务教育阶段数学教学大纲就明确提出,在数学教学过程中要渗透数学思想方法. 此后,我国数学教育界对此进行了理论研究与实践探索,并取得了丰硕的成果. 但在教学实践中如何渗透数学思想方法却值得商榷. 这种高层次的解题策略与技能学习完全不同,不能仅凭借一两节课或几个例题的讲解就能使学生完全接受和掌握,也不能依靠生硬的说教与灌输. 实例说明,不少学生尽管知道"特殊化法"、"平移法"、"化归法"等名词,但并不理解其实质. 在中学数学教学过程中,我们可以从以下几方面开展教学活动,以体现、烘托、渗透数学思想方法.

(1)结合知识内容,介绍对数学发展产生重大影响与推动作用的历史事件,比如,解析几何的创立,非欧几何的发现,微积分的诞生,等等. 让学生体会、领略数学发展历史中的数学思想、精神与方法. 新颁布的高中数学课程标准通过设立"数学文化"栏目对此以法规的形式提出了明确的要求.

(2)在数学概念、公式、法则、性质、定理等数学知识的学习过程中,渗透数学思想方法. 比如,有理数运算通过绝对值转化为算术数的运算,实数运算通过取近似值转化为有理数的运算,复数运算通过实部与虚部的分解转化为实数的运算. 从诸如此类的现象中概括、提炼出从未知向已知转化的化归思想;展现三角公式之间的相互关系,体现数学的简约化思想;柱、锥、台侧面积公式的统一、直线方程的多种形式归纳为过两点或一点一方向两类,体现数学的统一化思想,等等.

(3)在解决问题过程中,以数学思想为指

让课堂变成学生活动的平台

——一道习题教学的过程与体会

杨光明

（江苏省通州市刘桥中学，226300）

在课堂教学中是老师直接讲解？还是让学生自己思考、探求、尝试去解决问题？笔者认为，应该选择后者，让课堂变成学生活动的平台. 下面以一道习题教学为例，谈谈个人的做法与体会.

一、探求过程

问题　钝角三角形中，三内角依次成等差数列，最长边与最短边之比为 m，则 m 的取

导，寻求解决问题的途径. 例 1 已说明了这一点，请再看一例.

例 3　将一个正方体平均剖分成个 n^3 个小正方体，当一直线穿过这个大正方体时，该直线至多穿过多少个小正方体？

分析　这是个空间问题，比较难想象，故将之转化为类似的平面问题（特殊化思想）：将一个正方形平均剖分成个 n^2 个小正方形，当一直线穿过这个正方形时，该直线最多穿过多少个小正方形？

对于这个平面问题，再一次地考虑 $n = 2$、3 的特殊情况，由图 2 不难猜想其结论可能是 $2n - 1$，但如何证明这个结论呢？

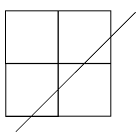

图 2

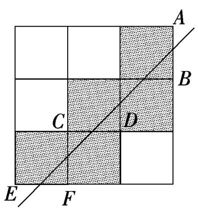

图 3

抓住被直线穿过的小正方形边数之和这个不变量，用两种不同的方法去计算，便可得到下述妙解（方程思想）：

设直线穿过的小正方形最多有 x 个，则这些小正方形被直线穿过的边数之和为 $2x$.

另一方面，被直线穿过的小正方形的边有两种情形，其一，位于大正方形边上，如图 2 中的 AB、EF，计有两条；其二，位于大正方形内部，这些都是被直线穿过的相邻两个小正方形的公共边，如图 2 中的线段 CD. 当直线穿过大正方形时，要使得穿过的小正方形的个数最多，该直线必须与形内的 $n - 1$ 条水平线、$n - 1$ 条垂直线都相交，因此，这些公共边计有 $2(n - 1)$ 条，所以被穿过的小正方形边数之和为 $2 + 4(n - 1)$.

建立等量关系

$$2x = 2 + 4(n - 1),$$

解得

$$x = 2n - 1.$$

将类似的思维方法用于解决正方体，比较容易得到原题的答案为 $3n - 2$.

通过上述学习活动，我们可以让学生在已有知识经验基础上，通过体验、感悟、提炼等理性思考，在长期的思维活动中逐步形成、领会数学思想. 不同的人知识经验不同，对同一个问题或现象的看法也不同，形成的思想观念可能会大相径庭. 因此，教学中渗透数学思想方法不能直接灌输，而应当针对学生的年龄特征，结合数学内容自然而然、潜移默化地进行，以便达到“润物细无声”的效果.

可见，数学教学不仅要求学生会解数学题，而且要学会数学地思考、学会用数学的眼光看周围的事物，实现这一目标的有效途径之一，就是在数学知识学习过程之中提炼数学思想方法，并用于指导新知识的学习，指导数学解题，以提高自己的思维策略水平.