○学习指导○

编者按　中国科学院院士、第三世界科学院院士、北京大学数学科学学院教授、我国资深数学家姜伯驹先生不仅在数学领域作出杰出贡献，还一直关心基础教育阶段的数学教与学，他与中国科学技术大学教授田畴先生合作撰写的论文“几何中的极大极小值”深入浅出地阐述了在研究数学问题时的生动的数学思维，以及蕴含其中的数学方法. 本刊将连载这篇文章，以飨读者.

几何中的极大极小问题

姜伯驹　　　田　畴

（北京大学，100871）　（中国科学技术大学，230026）

人们在日常生活中常常要考虑做一件事如何可以收到最大的效果，或者花最少的力量，或者在一定的时间内做最多的事情等，数学中关于极大极小的问题可以认为是人们日常生活中这类问题的一个理想化，因而有着特别的吸引力.

微积分给出了解决极大极小问题的一般方法，在这里我们不用也不讨论这种方法. 下面我们要给出一些解决这类问题的特殊的和初等的方法，这些方法是通过一些例子来说明的. 事实上，在你透彻地解决了一个问题之后，对你的想法加以分析，常常可以得到一种方法，它可以用来解决其它类似的问题. 这样，你的能力就有所提高，同时也增加了知识.

一、一个几何问题

在平面上给定了一条直线和在这条直线同一侧的两点，在这条直线上找出一点，它对所给的两点有最大的张角.

这就是我们要解决的问题. 首先画一个图（如图 1）并引入符号：设 l 是所给的直线，A，B 是所给定的两点，X 是直线 l 上的一个动点，我们的问题就是找出 X 的位置，使 $\angle AXB$ 有最大值.

可以想象 l 是一条路，你在路 l 上要射击一个物体 AB，当然你希望在路 l 上选到一个位置，在这里射中的机会最大，在这种情况下你所要选的位置就是问题中要找的一点.

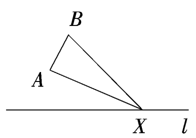

图 1

这个问题的解不是一下子可以看出来的，不过，虽然我们不知道这一点在哪里，但对有这样的一点是毫不怀疑的，我们先来考察当点 X 在直线 l 上移动时，$\angle AXB$ 变动的情形（如图2）. 当点 X 为直线 l 与直线 AB 的交点时，$\angle AXB$ 的值是零，当点 X 逐渐沿 l 向右侧移动，张角逐渐增大，但当 X 到 l 的右端很远的地方时，张角又很小了. $\angle AXB$ 的变化情况可以大致表示为图 2 中的曲线，在这两个极端情形之间一定有一极大值，这就是我们相信所求的点一定存在的理由（如果 l 与 AB 平行，我们想象 X 从 l 的极左端向右移动，也会得出同样的结论）.

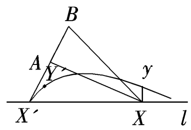

图 2

如果我们在 l 上任意取一点 X，如何能够很清楚地判定它是或者不是那个要求的极大

位置呢?有一个非常简单的方法,从图 2 中可以很容易地看出,如果一个点,不是极大位置,那么在极大位置 M 的另一边必然还有一点,它与这一点有相同的张角,为此,我们就需要知道,究竟哪些点有相同的张角?

从平面几何我们知道,过 A,B 作圆,在以 AB 为弦的弧与 l 的交点中,同一圆上的点有相同的张角,并且交于两点 X 和 X',那么点 X 和 X' 有相同的张角,而这个角就不是极大值,因为一个在 X 和 X' 之间与 l 相交的圆就给出更大的角,这就是说,与 l 交于两点的圆不可能给出最大角,达到极大值的点必在与 l 相切的圆上(如图 3). 这样,我们就解决了这个问题.

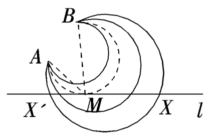

图 3

如何进一步确定所求点 M 的具体位置?M 是过 A,B 两点且与 l 相切的圆的切点,只要找出这个圆心 C,不难看出,C 是到 A,B 两点和直线 l 等距离的点,因此,它是线段 AB 的中垂线和以 l 为准线,A(或 B) 为焦点的抛物线的交点. 下面给出一个具体的例子.

例 1 给定两点 $A(0,1)$ 和 $B(2,3)$,直线 l:$y=-1$. 求在 l 上的点 M,使它在 l 上对线段 AB 有最大的张角(如图 4).

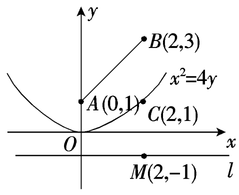

图 4

分析 先求 C,它是线段 AB 的中垂线 $y=-x+3$ 与以 $y=-1$ 为准线,$A(1,0)$ 为焦点的抛物线 $x^2=4y$ 的交点,不难算出所求点为 $C(2,1)$ 和 $C'(-6,9)$,在 l 上面相应的点为 $M(2,-1)$ 和 $M'(-6,-1)$.

这里求出了两个解,只有 M 是合于所求的,M' 是点在 BA 的延长线与 l 交点的左端移动时又一个极大点,但这时张角不是最大的.

同样可以求中垂线 $y=-x+3$ 与以 l 为准线,$B(2,3)$ 为焦点的抛物线 $(x-2)^2=8(y-1)$ 的交点,虽然曲线不同,但得到的交点是相同的,我们有一致的结论.

二、等值线法

现在让我们回过头来看一下上面这个问题解决的过程,看一看从方法上来说究竟重要之点是什么?能够从这里学到一些什么?我们想在这里最重要的一步就是把眼界放大,而走出这条直线 l,来考察平面上所有的点的张角. 我们考虑当点在平面上移动时张角的变化,也就是说,把张角看成点的位置的函数,并让点在平面上移动. 我们知道,当点在通过 A,B 点的一个圆的由弦 AB 所张的圆弧上移动时,张角保持不变. 这样的圆弧我们称为张角这个变量的等值线(如图 3). 一般的,使一个函数在它上面保持常量的线称为这个函数的等值线.

当然,不能忘记我们要解决的问题,这个点并不能在平面上自由移动,要求的是当这个点限制在一条指定路线上,即直线 l 上时张角的极大值. 究竟在指定路线上的哪一点能达到极大值呢?虽然我们已经知道了这个问题的答案,但是为了对它有更透彻的了解,应该从更一般的观点来看它. 为此,我们来看一个极其通俗和极其直观的例子.

我们知道在地图上有所谓的等高线,它们是具有相同海拔的点的联线. 也就是说,它们标明了哪些点离海平面具有相同的高度. 海拔就是地面上点的函数,所有这些点构成的曲线就是这个函数的等值线. 虽然在平常的地图上只有有限多条等高线,譬如设有海拔 100 米、200 米、300 米、…… 的等高线,但是我们设想通过每一点都有一条等高线. 如果有一条路,你希望知道这条路上哪一点最高(或最低). 我们来看这个问题该如何解决. 这个问题和上面提出的问题是类似的,首先很容易知道在哪些点不可能是最高或最低的. 如果在这条路上的某一点你向上走(即走上较高的位置) 或向下走(即走向较低的位置),我们就知道这一点的高度不可能达到极大或

离散型随机变量问题的背景及求解策略

马兴奎

（云南省文山州砚山一中，663100）

纵观近几年的高考数学试题，在理科试卷中几乎都考查了离散型随机变量的分布列和期望. 此类题型，从解题的思路上看，熟悉材料背景是关键. 笔者对近几年全国各地高考试卷的分布列和期望试题统计：有以“摸球”为背景的；有以体育竞赛（比赛胜负、射击、投篮命中率）为背景的；有以知识能力（选题、做题、抢答、面试、考驾照）为背景的；其他的还有以投掷硬币、旅游交通、经济利润、产品的（抽取、检验、加工）等为背景的. 这些背景在教材或高考复习备考资料中均能找到与其相关的习题、例题. 平时学习既要熟悉以这些材料背景为试题的题型特点，又要归纳整理解题思路. 本文以 2008 年高考试题为例，归类总结出这类题的相关背景及解题方法，供同学们学习参考.

一、以体育运动（投篮、射击等）为背景材料

极小，在一点向上或向下就意味着这条路是穿过一条等高线. 这样我们就得到一条一般性的原则：如果在某一点，指定的路线是穿过等值线的，那么这一点不可能是极大（或极小），换句话说，如果在指定路线上有一点达到极大（或极小），那么在这一点指定的路线与等值线相切. 这就是我们解决上面的那个问题的基本方法. 譬如说，如果我们设想直线 l 右端是无限延长出去的，那么在它上面的每一点都与等值线相交，而只有一点，在哪里是与等值线相切的，这就是达到极大值的点.

现在让我们应用这个原则来解决另一个简单的问题：在一条定直线上求一个点，使它到一个定点的距离最小.

首先引入必要的符号：设 A 是给定的点，a 是给定的直线，定点 A 不在直线 a 上，我们要求从 A 到 a 有最短距离. 人人都知道答案，然而我们的目的不只是求出答案，还要用它来检验一个一般的想法. 我们希望使它达到最小值的量是一个动点到定点 A 的距离. 这距离依赖于动点的位置，其等值线显然是以 A 点为中心的同心圆. “指定的路线”是直线 a（如图 5）. 在指定的路线穿过等值线的地方不可能是最小值. 达到最小值的点是指定路线上与等值线相切的点（图 5 中的点 M）；而从 A 到 a 的最短距离就等于那个以 A 为圆心并与 a 相切的圆的半径. 这就是我们早已熟知的答案. 通过这个例子，我们还是有所收获的，我们把一般的想法弄得更清楚了.

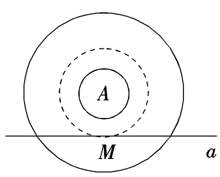

图 5

以上两个例子都是平面的情形，也就是所考虑的量都是平面上点的函数. 当然，等值线法同样可以推广到空间的情形：在空间中，代替等值线的是等值面，想法还是一样的.

下面的问题读者可以试用等值线的方法解决：给定三角形的两边，在什么情况下三角形的面积最大?（未完待续）